GROUPE DES ÉCOLES DES TÉLÉCOMMUNICATIONS

INSTITUT NATIONAL DES TÉLÉCOMMUNICATIONS

CONTRÔLE DE CONNAISSANCES

MODULE : Mathématiques Appliquées — CODE : MA11
DURÉE : 3 heures — DATE : 12 Janvier 2007
DOCUMENTS AUTORISÉS : Polys de Bayen-Margaria — COORDINATEUR : Arif Mard

---

EXERCICE 1

Soit $\mathcal{H} = L^2_{\mathbb{R}}([0, 2\pi])$ l'espace de Hilbert réel des fonctions de carré intégrable, et soit A l'opérateur linéaire défini pour tout $x \in \mathcal{H}$ par

$$(Ax)(t) = \int_0^{2\pi} \sin(t+s)x(s)ds.$$

1. Montrer que A est un opérateur auto-adjoint.

2. On représente une fonction $x \in \mathcal{H}$ par sa série de Fourier:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

   Donner l'expression de Ax.

3. L'espace $\mathcal{H}$ étant muni de la norme habituelle, calculer la norme de A définie par:

$$\|A\|^2 = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|^2_{L^2}.$$

EXERCICE 2

Calculer les limites pour $n \longrightarrow +\infty$ des distributions suivantes sur $\mathbb{R}$:

1.
$$T_n = \frac{n}{1+n^2x^2}$$

2.
$$S_n = \frac{n^3 x}{(1+n^2x^2)^2}$$

3.
$$U_n = \frac{n^3 \sin x}{(1+n^2x^2)^2}.$$

EXERCICE 3

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On va calculer la transformée de Fourier de la fonction f définie par:
$$f(x) := \frac{1}{a^2+x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$
Pour cela on intégrera la fonction F de la variable complexe z définie par:
$$F(z) := \frac{e^{-i2\pi\nu z}}{a^2+z^2} \qquad \nu \in \mathbb{R},$$
sur un contour convenable. En déduire la transformée de Fourier de f.

2. Calculer, en s'aidant de la question précédente, la transformée de Fourier de la fonction g définie par:
$$g(x) := \left(\frac{1}{a^2+x^2}\right)^2, \qquad a \in \mathbb{R}_+^*.$$

EXERCICE 4

Dans un circuit électrique passif alimenté par une source de tension, la charge électrique obéit à l'équation différentielle ordinaire suivante:

$$q''(t) + 2q'(t) - 5q(t) = e^{-t}\sin(2t).$$

Sachant que $q(0^+) = 0$, $q'(0^+) = 1$, trouver la charge électrique en fonction de t en utilisant la transformée de Laplace.

Exercice I:

1) $(Ax)(t) = \int_0^{2\pi} \sin(t+s)\, x(s)\, ds$

$\langle Ax, y\rangle \overset{?}{=} \langle x, Ay\rangle \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$

$\langle Ax, y\rangle = \int_0^{2\pi} (Ax)(t)\, y(t)\, dt$

$= \int_0^{2\pi} dt \left(\int_0^{2\pi} ds \sin(t+s)\, x(s)\, ds \right) y(t)$

$= \int_0^{2\pi} ds\, x(s) \int_0^{2\pi} dt \sin(s+t)\, y(t)$

$= \int_0^{2\pi} ds\, x(s)(Ay)(s) = \langle x, Ay\rangle .$

2) $x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$

$(Ax)(t) = \int_0^{2\pi} \sin(t+s) \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos ns - b_n \sin ns) \right\} ds$

$= \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} \sin(t+s)\, ds + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_0^{2\pi} \sin(t+s) \cos ns\, ds + b_n \int_0^{2\pi} \sin(t+s) \sin ns\, ds \right.$

$\sin(t+s)\cos ns = ?$

$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a\cos b$

$\sin a\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$

$$\boxed{\sin(t+s)\cos ns = \frac{1}{2}\left[\sin(t+(n+1)s) + \sin(t+(1-n)s)\right]}$$

$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$

$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$

$$\Rightarrow \sin a\sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\sin(t+s)\sin ns = \frac{1}{2}\left[\cos(t+(1-n)s) - \cos(t+(1+n)s)\right]$$

$\underline{n\neq 1}$:

$$\int_0^{2\pi} \sin(t+s)\cos ns\,ds = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(t+(1+n)s)\,ds + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(t+(1-n)s)\,ds$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{-\cos(t+(1+n)s)}{1+n}\right]_0^{2\pi} + \left[\frac{-\cos(t+(1-n)s)}{1-n}\right]_0^{2\pi}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \frac{\cos t - \cos(t+(n+1)2\pi)}{1+n} \right\} = 0 .$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(t+s)\sin ns\, ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(t+(1-n)s)\, ds - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(t+(1+n)s)\, ds$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(t+(1-n)s)}{1-n} \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(t+(1+n)s)}{1+n} \right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-\sin t + \sin(t+(1-n)2\pi)}{1-n} \right] + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin t + \sin(t+(1+n)2\pi)}{1+n} \right]$$

$$= 0$$

$$\therefore \boxed{\int_0^{2\pi} \sin(t+s)\cos ns\, ds = 0 = \int_0^{2\pi} \sin(t+s)\sin ns\, ds \quad \forall n \neq 1}$$

$\underline{n=1:}$ $\quad \sin(t+s)\sin s = \frac{1}{2}\left[\cos t - \cos(t+2s)\right]$

$$\sin(t+s)\cos s = \frac{1}{2}\left[\sin t + \sin(t+2s)\right]$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(t+s)\cos s\,ds = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin t\,ds + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(t+2s)\,ds$$

$$= \pi \sin t + 0 ;$$

d'une façon similaire:

$$\int_0^{2\pi} \sin(t+s)\sin s\,ds = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos t\,ds - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(t+2s)\,ds$$

$$= \pi \cos t - 0 .$$

Il vient donc:

$$\boxed{(Ax)(t) = \pi\left[a_1 \sin t + b_1 \cos t\right]}$$

3) $\|A\|^2 := \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|^2$

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax \rangle$$

$$= \int_0^{2\pi} |Ax(t)|^2 dt = \pi^2 \int_0^{2\pi} \left[a_1 \sin t + b_1 \cos t\right]^2 dt$$

$$= \pi^2 a_1^2 \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2t}{2} dt + \pi^2 a_1 b_1 \int_0^{2\pi} \sin 2t\,dt + \pi^2 b_1^2 \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2} dt$$

$$\Rightarrow \quad \|Ax\|^2 = \pi^3 (a_1^2 + b_1^2).$$

Nous cherchons la valeur maximum de $a_1^2 + b_1^2$ lorsque $\|x\|^2 = 1$. Or,

$$\|x\|^2 = \pi \left\{ \frac{a_0^2}{2} + (a_1^2 + b_1^2) + \cdots + (a_n^2 + b_n^2) + \cdots \right\} = 1 ;$$

nous en déduisons que $a_1^2 + b_1^2$ est max. lorsque les autres termes de la série de Fourier sont nuls. Nous obtenons donc:

$$\pi (a_1^2 + b_1^2) = 1 \quad \Rightarrow a_1^2 + b_1^2 = \frac{1}{\pi}$$

Il vient donc :

$$\|A\|^2 = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|^2 = \pi^3 \cdot \frac{1}{\pi} = \pi^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\|A\| = \pi}$$

—— o ——

Exercice II :

Calculer les limites pour $n \to +\infty$ des distributions suivantes sur $\mathbb{R}$:

(1) $$T_n = \frac{n}{1+n^2x^2}$$

(2) $$S_n = \frac{n^3 x}{(1+n^2x^2)^2}$$

(3) $$U_n = \frac{n^3 \sin x}{(1+n^2x^2)^2}.$$

Correction : $\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, on va noter

$$\|\varphi\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)|.$$

(1) $\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$\langle T_n, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{1+n^2x^2} \varphi(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(u/n)}{1+u^2}\, du.$$

Or, nous avons

$\left|\frac{\varphi(u/n)}{1+u^2}\right| \leq \|\varphi\|_\infty \cdot \frac{1}{1+u^2}$, qui est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour $n \to \infty$, $\varphi(u/n) \longrightarrow \varphi(0)$ pour tout u. Le TCD de Lebesgue implique alors :

$$\langle T_n, \varphi \rangle \longrightarrow \varphi(0) \int_{\mathbb{R}} \frac{du}{1+u^2} = \pi \varphi(0)$$

Donc $\boxed{T_n \xrightarrow[\mathcal{D}']{n \to \infty} \pi \delta}$

(2) On remarque que $S_n = -\frac{1}{2} T_n'$. Puisque la dérivation des distributions est continue, on en déduit que $S_n \to -\frac{\pi}{2} \delta'$:

$$\boxed{S_n \xrightarrow[\mathcal{D}']{n \to \infty} S = -\frac{\pi}{2} \delta'}$$

(3) Nous pouvons écrire, $\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$:

$$\langle U_n, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{n^3 x}{(1+n^2x^2)^2} \cdot \frac{\sin x}{x} \varphi(x) \, dx,$$

où $\frac{\sin x}{x} \in \mathcal{C}^\infty$, et donc

$$\psi(x) := \frac{\sin x}{x}\varphi(x) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}).$$

Alors,

$$\langle U_n, \varphi \rangle = \langle S_n, \psi \rangle, \text{ et on en déduit}$$

que

$$\langle U_n, \varphi \rangle \longrightarrow \langle S, \psi \rangle = \langle -\frac{\pi}{2}\delta', \psi \rangle$$

$$= + \frac{\pi}{2}\langle \delta, \psi' \rangle$$

$$= + \frac{\pi}{2}\langle \delta, \varphi' \rangle$$

$$= - \frac{\pi}{2}\langle \delta', \varphi \rangle$$

soit $U_n \xrightarrow[\mathcal{D}']{n \uparrow \infty} U = -\frac{\pi}{2}\delta'$,

où nous avons utilisé :

a) $\frac{\sin x}{x}$ se prolonge par 1 en 0, et

b) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\Big|_{x=0} = 0$.

Exercice III :

1) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On va calculer la transformée de Fourier de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{a^2+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pour cela on intégrera la fonction de la variable complexe

$$F(z) = \frac{e^{-i2\pi\nu z}}{a^2+z^2} \quad \nu \in \mathbb{R},$$

sur un contour convenable. En déduire la transformée de Fourier de f.

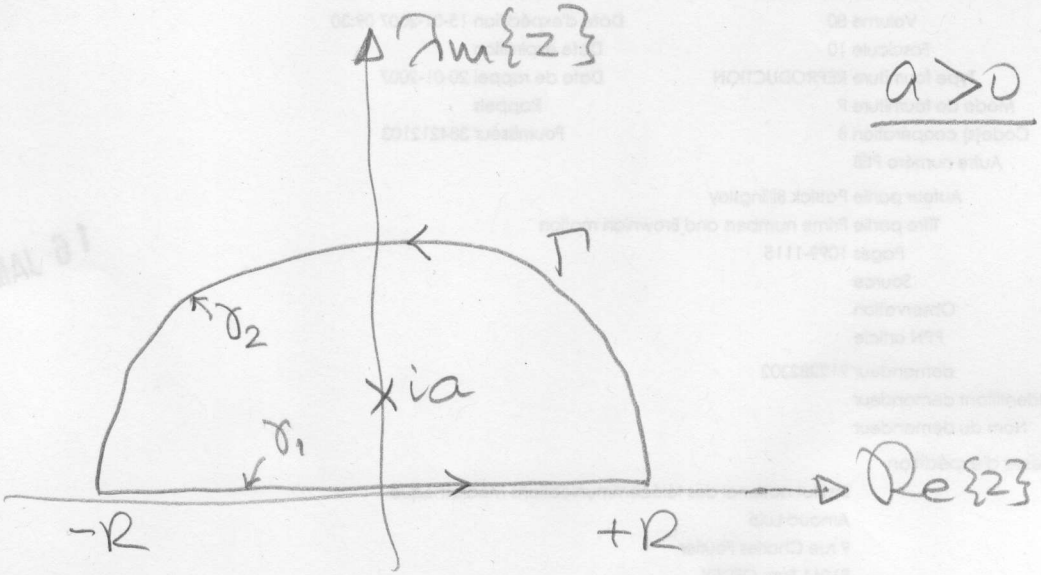
2) Calculer, en s'aidant de la question précédente, la transformée de Fourier de la fonction

$$g(x) = \left(\frac{1}{a^2+x^2}\right)^2, \quad a \in \mathbb{R}_+^*.$$

— o —

EXERCICE III : $F(z) = \dfrac{\exp(-i2\pi\nu z)}{a^2+z^2}$ $\nu \in \mathbb{R}$.

1) $F(z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{\pm ia\}$, où $\pm ia$ sont des pôles simples. Considérons l'intégrale de $F(z)$ sur le contour Γ suivant :



Le théorème de résidus $\Rightarrow$ $(R > a)$

$$\oint_\Gamma \frac{e^{-i2\pi\nu z}}{z^2+a^2}\,dz = 2\pi i\, \mathrm{Res}\{F; ia\}$$

$$\mathrm{Res}\{F; ia\} = \lim_{z\to ia}(z-ia)F(z)$$

$$= \lim_{z\to ia}(z-ia)\frac{\exp(-i2\pi\nu z)}{(z-ia)(z+ia)}$$

$$= \frac{\exp(2\pi a\nu)}{2ia}$$

Donc :

$$\oint_\Gamma \frac{e^{-i2\pi\nu z}}{z^2+a^2}\,dz = \frac{2\pi i \cdot e^{2\pi a\nu}}{2ia}$$

$$= \frac{\pi}{a} e^{2\pi a\nu}.$$

Or, $\oint_\Gamma \frac{e^{-i2\pi\nu z}}{z^2+a^2}\,dz = \int_{\gamma_1} \frac{e^{-i2\pi\nu z}}{z^2+a^2}\,dz + \int_{\gamma_2} \frac{e^{-i2\pi\nu z}}{z^2+a^2}\,dz$

Intégrale sur γ_1 : $z = x$, $dz = dx$.

$$\int_{\gamma_1} \frac{e^{-i2\pi\nu z}}{z^2+a^2}\,dz = \int_{-R}^{+R} \frac{e^{-i2\pi\nu x}}{x^2+a^2}\,dx$$

Intégrale sur γ_2 : $z = Re^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi]$.

$dz = iRe^{i\theta}d\theta$

$$\int_{\gamma_2} \frac{e^{-i2\pi\nu z}}{z^2+a^2}\,dz = \int_0^\pi \frac{e^{-i2\pi\nu R(\cos\theta + i\sin\theta)}}{R^2e^{i2\theta}+a^2} iRe^{i\theta}d\theta$$

Or,

$$\left| \int_0^\pi \frac{e^{-i2\pi\nu R(\cos\theta+i\sin\theta)}}{R^2e^{i2\theta}+a^2} iRe^{i\theta}d\theta \right| \leq \int_0^\pi \frac{e^{2\pi\nu R\sin\theta}}{|R^2e^{i2\theta}+a^2|} R\,d\theta$$

Supposons $\nu<0$: Alors l'intégrande $\to 0$ quand $R \to \infty$, et nous avons :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i2\pi\nu x}}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi}{a} e^{2\pi\nu a}$$

On conclut donc : $\hat{f}(\nu) = \frac{\pi}{a} e^{2\pi\nu a}$ $\nu<0$.

Comme $f(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$ est une fonction paire, sa TF l'est aussi, & on en déduit que

$$\hat{f}(\nu) = \frac{\pi}{a} e^{-2\pi\nu a} \qquad \nu>0.$$

Finalement :

$$\boxed{\hat{f}(\nu) = \frac{\pi}{a} e^{-2\pi a|\nu|}} \quad \nu\in\mathbb{R}.$$

2) $\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)^2 = f(x) \cdot f(x) = g(x)$

$\hat{g}(\nu) = (\hat{f} * \hat{f})(\nu)$.

$$(\hat{f} * \hat{f})(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu-\xi)\,\hat{f}(\xi)\,d\xi$$

$$= \frac{\pi^2}{a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi a|\nu-\xi|}\, e^{-2\pi a|\xi|}\, d\xi$$

Soit $\nu > 0$.

$$(\hat{f} * \hat{f})(\nu) = \frac{\pi^2}{a^2} \int_{-\infty}^{\nu} e^{-2\pi a(\nu-\xi)}\, e^{-2\pi a|\xi|}\, d\xi$$

$$+ \frac{\pi^2}{a^2} \int_{\nu}^{+\infty} e^{+2\pi a(\nu-\xi)}\, e^{-2\pi a|\xi|}\, d\xi$$

$$= \frac{\pi^2}{a^2} \int_{-\infty}^{0} e^{-2\pi a(\nu-\xi)}\, e^{+2\pi a\xi}\, d\xi + \frac{\pi^2}{a^2} \int_{0}^{\nu} e^{-2\pi a(\nu-\xi)}\, e^{-2\pi a\xi}\, d\xi$$

$$+ \frac{\pi^2}{a^2} \int_{\nu}^{+\infty} e^{2\pi a(\nu-\xi)}\, e^{-2\pi a\xi}\, d\xi$$

$$= \frac{\pi^2}{a^2} \int_{-\infty}^{0} e^{-2\pi a\nu} e^{+4\pi a\xi} d\xi$$

$$+ \frac{\pi^2}{a^2} e^{-2\pi a\nu} \int_{0}^{\nu} d\xi$$

$$+ \frac{\pi^2}{a^2} e^{2\pi a\nu} \int_{\nu}^{+\infty} e^{-4\pi a\xi} d\xi$$

$$= \frac{\pi^2}{a^2} e^{-2\pi a\nu} \left[\frac{e^{4\pi a\xi}}{4\pi a} \right]_{-\infty}^{0}$$

$$+ \frac{\pi^2}{a^2} e^{-2\pi a\nu} \cdot \nu$$

$$+ \frac{\pi^2}{a^2} e^{2\pi a\nu} \left[\frac{e^{-4\pi a\xi}}{-4\pi a} \right]_{\nu}^{\infty}$$

$$= \frac{\pi^2}{a^2} \frac{e^{-2\pi a\nu}}{4\pi a} + \frac{\pi^2}{a^2} \nu e^{-2\pi a\nu} + \frac{\pi^2}{a^2} e^{+2\pi a\nu} \frac{e^{-4\pi a\nu}}{4\pi a}$$

$$= \frac{\pi}{2a^3} e^{-2\pi a\nu} + \frac{\pi^2}{a^2} \nu e^{-2\pi a\nu}$$

$$= \frac{\pi^2}{a^3} \left[\frac{1}{2\pi} + a\nu \right] e^{-2\pi a\nu}$$

Par la parité de f, $\hat{f}$ doit être paire aussi.
On en déduit donc :

$$\hat{g}(\nu) = \frac{\pi^2}{a^3}\left[\frac{1}{2\pi} + a|\nu|\right] e^{-2\pi a|\nu|}$$

$$= \frac{\pi}{2a^3}\left[1 + 2\pi a|\nu|\right] e^{-2\pi a|\nu|}$$

GROUPE DES ÉCOLES DES TÉLÉCOMMUNICATIONS

INSTITUT NATIONAL DES TÉLÉCOMMUNICATIONS

CONTRÔLE DE CONNAISSANCES

MODULE : Mathématiques Appliquées — CODE : MA11
DURÉE : 3 heures — DATE : 30 Janvier 2006
DOCUMENTS AUTORISÉS : Polys de cours — COORDINATEUR : Arif Mardin

---

EXERCICE 1

Soit $\alpha \in]0,1[$, et $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant le théorème des résidus, calculer l'intégrale:

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}}{(x+1)^n}$$

(On pourra distinguer les cas $n = 1$ et $n \geq 2$).

EXERCICE 2

Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles de carré intégrable, muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\infty f(x)g(x)dx.$$

On considère l'opérateur U défini $\forall f \in E$ par:

$$(Uf)(x) = \begin{cases} f(x-1), & \text{si } x \geq 1; \\ 0, & \text{si } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

1. Montrer que U est une isométrie.
2. Quel est l'adjoint U^* de U? Calculer l'opérateur U^*U.
3. Soit $V = UU^*$. Montrer que V est auto-adjoint et calculer V^2, puis V^n. Conclusion?

4. Calculer $Vf = UU^*f$ pour $f \in E$.

EXERCICE 3

On considère la suite de distributions (T_n) sur $\mathbb{R}$ définie par

$$T_n = \mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus[-1/n,1/n]}(x)\frac{x}{|x|^3} + 2(\log n)\delta_0'.$$

Montrer que, au sens de la convergence des distributions, la suite (T_n) converge vers

$$-\frac{d^2}{dx^2}\Big(\frac{x}{|x|}\log|x|\Big) - 2\delta_0'.$$

EXERCICE 4

Calculer la transformée de Fourier de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{1+x^2}.$$

(On pourra utiliser les propriétés du produit de convolution).Exprimer le résultat sous la forme de $ce^{-\frac{\nu^2}{2}}$ (c=const.) multiplié par uneintégrale du type

$$\int_0^\infty a(\eta)b(\nu\eta)d\eta.$$

CORRIGÉ DU CC DU 30/01/06

Exercice I: $\alpha \in]0,1[$, $n \in \mathbb{N}^*$

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^{-\alpha}}{(x+1)^n} dx. \quad (7^{\text{ème}} \text{ type})$$

$n=1$:

$$(1 - e^{-i2\pi\alpha}) I = 2\pi i \, \text{Res}\left[\frac{z^{-\alpha}}{1+z}; -1\right]$$

On choisit la détermination $\text{Arg} z \in]0, 2\pi[$:

$$(-1)^{-\alpha} = e^{-\alpha \text{Log}(-1)} = e^{-\alpha[\text{Log}|-1| + i\pi]} = e^{-i\alpha\pi}.$$

$$\therefore \quad (1 - e^{-i2\alpha\pi}) I = 2\pi i \, e^{-i\alpha\pi}$$

$$e^{-i\alpha\pi}\left(e^{+i\alpha\pi} - e^{-i\alpha\pi}\right) I = 2\pi i \, e^{-i\alpha\pi}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}}$$

$n \geq 2$: $\text{Res}\left[z^{-\alpha} \cdot \frac{1}{(1+z)^n}; -1\right]$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left\{(z+1)^n \cdot \frac{z^{-\alpha}}{(z+1)^n}\right\}\right]_{z=-1}$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}(-\alpha)(-\alpha-1)(-\alpha-2)\cdots(-\alpha-n+2)\left[z^{-\alpha-n+1}\right]\Big|_{z=-1}$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-2)(-1)^{-\alpha-(n-1)}$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-2)\,e^{-i\pi(\alpha+n-1)}$$

$$= \frac{\cancel{(-1)^{n-1}}}{(n-1)!}\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-2)\,\underbrace{e^{-i\pi(n-1)}}_{\cancel{(-1)^{n-1}}}\cdot e^{-i\pi\alpha}$$

$$= \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-2)}{(n-1)!}e^{-i\pi\alpha}$$

$$\therefore \boxed{I = \frac{\pi\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-2)}{(n-1)!\sin\pi\alpha}} \quad \underline{\forall n \geq 2}$$

Exercice II :

1) $\forall f \in E$: $(Uf)(x) = \begin{cases} f(x-1) & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

$$\|Uf\|^2 = \langle Uf, Uf \rangle = \int_0^{+\infty} |(Uf)(x)|^2 dx$$

$$= \int_1^{+\infty} |f(x-1)|^2 dx = \int_0^{+\infty} |f(u)|^2 du = \|f\|^2.$$

$\Leftrightarrow$ U est une isométrie.

2) $\forall f, g \in E$, on a :

$$\langle Uf, g \rangle = \langle f, U^* g \rangle$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\infty} (Uf)(x)\, g(x) dx = \int_1^{\infty} f(x-1)\, g(x) dx$$

$$= \int_0^{\infty} f(x) (U^* g)(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\infty} f(x)\, g(x+1) dx = \int_0^{\infty} f(x) (U^* g)(x) dx$$

$$\Leftrightarrow (U^* g)(x) = g(x+1).$$

$\forall f \in E$: $(Uf)(x) = f(x-1)$

$(U^*Uf)(x) = (U^*f)(x-1) = f(x)$

$\Rightarrow \underline{U^*U = \mathbb{1}}$,

Ce qui constitue un résultat général quand U est une isométrie, car:

$\forall f,g \in E$: $\langle Uf, Ug \rangle = \langle f, g \rangle$

$\Leftrightarrow \langle U^*Uf, g \rangle = \langle f, g \rangle$.

3) $V^* = (UU^*)^* = UU^* = V \Rightarrow V$ est <u>auto-adjt</u>

$V^2 = U\underbrace{U^*U}_{\mathbb{1}}U^* = UU^* = V$

$\Rightarrow V^3 = V^2 = V, \dots ; V^n = \dots = V$

$\Rightarrow V$ est idempotent.

4) $(Vf)(x) = (UU^*f)(x) = (Uf)(x+1)$

$$= \begin{cases} f(x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } 0 \geq x \geq -1 \end{cases}$$

$(Vf)(x) = Y(x) f(x)$

Exercice III :

$$T_n := \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus[-\frac{1}{n},+\frac{1}{n}]}(x)\frac{x}{|x|^3} + 2\log n\,\delta_0'$$

$$\langle T_n, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus[-\frac{1}{n},+\frac{1}{n}]}(x)\frac{x}{|x|^3}\varphi(x)dx + 2\log n\langle \delta_0', \varphi\rangle$$

$$= \int_{-\infty}^{-\frac{1}{n}} \frac{x}{|x|^3}\varphi(x)dx + \int_{1/n}^{+\infty} \frac{x}{|x|^3}\varphi(x)dx - 2\log n\,\varphi'(0)$$

$$= +\int_{+\infty}^{\frac{1}{n}} \frac{x}{|x|^3}\varphi(-x)dx + \int_{1/n}^{+\infty} \frac{x}{|x|^3}\varphi(x)dx - 2\log n\,\varphi'(0)$$

$$= \int_{1/n}^{+\infty} \frac{1}{x^2}(\varphi(x)-\varphi(-x))dx - 2\log n\,\varphi'(0)$$

$$\varphi(x)-\varphi(-x) = u \qquad \frac{dx}{x^2} = dv$$

$$dx[\varphi'(x)+\varphi'(-x)] = du \qquad -\frac{1}{x} = v$$

$$= \left[\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{-x}\right]_{\frac{1}{n}}^{+\infty} + \int_{1/n}^{+\infty} \frac{\varphi'(x)+\varphi'(-x)}{x}dx - 2\log n\,\varphi'(0)$$

$$= +n\left[\varphi(\tfrac{1}{n})-\varphi(-\tfrac{1}{n})\right] + \int_{1/n}^{+\infty} \frac{\varphi'(x)+\varphi'(-x)}{x}dx - 2\log n\,\varphi'(0)$$

$$\varphi'(x) + \varphi'(-x) = u$$

$$[\varphi''(x) - \varphi''(-x)]dx = du \qquad \frac{dx}{x} = dv \quad \log x = v$$

$$\therefore \int_{1/n}^{+\infty} \frac{\varphi'(x)+\varphi'(-x)}{x} dx = \left[(\varphi'(x)+\varphi'(-x))\log x\right]_{\frac{1}{n}}^{+\infty}$$

$$- \int_{1/n}^{+\infty} (\varphi''(x) - \varphi''(-x)) \log x \, dx$$

$$= -\left(\varphi'\left(\tfrac{1}{n}\right) + \varphi'\left(-\tfrac{1}{n}\right)\right)\log\tfrac{1}{n}$$

$$- \int_{1/n}^{+\infty} \varphi''(x)\log x\,dx + \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \varphi''(-x)\log x\,dx$$

Considérons la deuxième intégrale :

$$\int_{1/n}^{+\infty} \varphi''(-x)\log x\,dx \qquad x \to -x$$

$$= -\int_{-\frac{1}{n}}^{-\infty} \varphi''(x)\log(-x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{-1/n} \varphi''(x)\log|x|\,dx$$

$$\therefore \; -\left\{\int_{1/n}^{+\infty} \varphi''(x)\,\mathrm{Log}\,x\,dx - \int_{-\infty}^{-\frac{1}{n}} \varphi''(x)\,\mathrm{Log}|x|\,dx\right.$$

$$= -\int_{\mathbb{R}\setminus\left[-\frac{1}{n},+\frac{1}{n}\right]} \frac{x}{|x|}\,\mathrm{Log}|x|\,\varphi''(x)\,dx$$

En regroupant tous les termes:

$$\langle T_n, \varphi\rangle = \int_{1/n}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\left(\varphi(x)-\varphi(-x)\right)dx - 2\,\mathrm{Log}\,n\,\varphi'(0)$$

$$= n\left[\varphi\left(\tfrac{1}{n}\right)-\varphi\left(-\tfrac{1}{n}\right)\right] + \mathrm{Log}\,n\left[\varphi'\left(\tfrac{1}{n}\right)+\varphi'\left(-\tfrac{1}{n}\right)\right] -$$

$$-\int_{\mathbb{R}\setminus\left[-\frac{1}{n},+\frac{1}{n}\right]} \frac{x}{|x|}\,\mathrm{Log}|x|\,\varphi''(x)\,dx \; - 2\,\mathrm{Log}\,n\,\varphi'(0)$$

$$= -\int_{\mathbb{R}\setminus\left[-\frac{1}{n},+\frac{1}{n}\right]} \frac{x}{|x|}\,\mathrm{Log}|x|\,\varphi''(x)\,dx + n\left[\varphi\left(\tfrac{1}{n}\right)-\varphi\left(-\tfrac{1}{n}\right)\right]$$

$$+\mathrm{Log}\,n\left[\varphi'\left(\tfrac{1}{n}\right)+\varphi'\left(-\tfrac{1}{n}\right)-2\varphi'(0)\right]$$

Notons que $\frac{x}{|x|}\mathrm{Log}|x| \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, donc

$$\lim_{n\to\infty} -\int_{\mathbb{R}\setminus\left[-\frac{1}{n},+\frac{1}{n}\right]} \frac{x}{|x|}\,\mathrm{Log}|x|\,\varphi''(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}} \frac{x}{|x|}\,\mathrm{Log}|x|\,\varphi''(x)\,dx$$

En outre: $\lim_{n\to\infty} n\left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right)-\varphi\left(-\frac{1}{n}\right)\right]$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon}\right] = 2\varphi'(0).$$

Et puis: En utilisant le Th— des accroissements finis:

$$\left|2\varphi'(0)-\varphi'\left(\frac{1}{n}\right)-\varphi'\left(-\frac{1}{n}\right)\right| \leq \frac{2}{n}\sup_{c\in\left]-\frac{1}{n},+\frac{1}{n}\right[}|\varphi''(c)|$$

Ce qui implique:

$$\lim_{n\to\infty} \text{Log}n\left[2\varphi'(0)-\varphi'\left(\frac{1}{n}\right)-\varphi'\left(-\frac{1}{n}\right)\right] = 0.$$

Nous avons finalement:

$$\lim_{n\to\infty}\langle T_n,\varphi\rangle = -\left\langle\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{x}{|x|}\text{Log}x\right),\varphi\right\rangle - 2\langle\delta_0',\varphi\rangle$$

—— o ——

EXERCICE IV :

$$f(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{1+x^2}$$

$$g(x) := e^{-x^2/2} \quad ; \quad h(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\hat{h}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\nu x}}{x^2+1}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{+i\nu x}}{x^2+1}\,dx$$

Intégrale de 3ème type

$$= 2\pi i \, \text{Rés}\left(\frac{e^{i\nu z}}{z^2+1} ; i\right)$$

$$= 2\pi i \, \frac{e^{-|\nu|}}{2i} = \boxed{\pi e^{-|\nu|} = \hat{h}(\nu)}$$

Or, $\mathcal{F}\{e^{-\pi t^2}\} = e^{-\pi \nu^2}$

$t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x$: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} e^{-i2\pi\nu t}\,dt = e^{-\pi\nu^2}$

$dt = \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$ $\Big\lfloor_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-i2\pi\nu \frac{x}{\sqrt{2\pi}}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = e^{-\pi\nu^2}$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-i\sqrt{2\pi}\nu x} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = e^{-\pi\nu^2}$$

$\sqrt{2\pi}\,\nu = \nu'$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-i\nu' x}\,dx = \sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{\nu'^2}{2}}$$

$$\therefore\ g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow \boxed{\hat{g}(\nu) = \sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{\nu^2}{2}}}$$

$$\mathcal{F}(gh)(\nu) = (\hat{g} * \hat{h})(\nu)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\nu-\eta)\,\hat{h}(\eta)\,d\eta$$

$$\pi\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\nu-\eta)^2}{2}} e^{-|\eta|}\,d\eta\,,$$

$$= \pi\sqrt{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(\nu-\eta)^2}{2}} e^{+\eta}\,d\eta + \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{(\nu-\eta)^2}{2}} e^{-\eta}\,d\eta\right]$$

(Chgt de var : $\eta \to -\eta$)

$$= \pi\sqrt{2\pi}\left[-\int_{+\infty}^{0} e^{-\frac{(\nu+\eta)^2}{2}} e^{-\eta}\,d\eta + \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{(\nu-\eta)^2}{2}} e^{-\eta}\,d\eta\right]$$

$$= \pi\sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{\nu^2}{2}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{\eta^2}{2}} \left(e^{+\nu\eta} + e^{-\nu\eta}\right) e^{-\eta}\,d\eta$$

$$= (2\pi)^{3/2}\, e^{-\frac{\nu^2}{2}} \int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{\eta^2}{2}-\eta} \operatorname{ch}\nu\eta\,d\eta$$

———— o ————

GROUPE DES ÉCOLES DES TÉLÉCOMMUNICATIONS

INSTITUT NATIONAL DES TÉLÉCOMMUNICATIONS

CONTRÔLE DE CONNAISSANCES

MODULE : Mathématiques Appliquées — CODE : MA11
DURÉE : 3 heures — DATE : 21 Février 2007
DOCUMENTS AUTORISÉS : Polys de Bayen-Margaria — COORDINATEUR : Arif Mardin

---

EXERCICE 1:

Soit $a \in \mathbb{R}$ une constante non nulle. En utilisant le théorème des résidus, calculer l'intégrale suivante:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2} dx.$$

EXERCICE 2:

1. Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe, et $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ un opérateur linéaire borné. Soit A^* l'opérateur adjoint de A. Montrer que les opérateurs A^*A, $A + A^*$, $i(A - A^*)$ sont auto-adjoints.

2. Soit $\mathcal{H} = l^2$, l'espace de Hilbert complexe des suites infinies dénombrables de nombres complexes de carré sommable. On y définit un opérateur linéaire A par:

$$A(x_1, x_2, \cdots) := (x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \cdots)$$

où $\xi := (x_1, x_2, \cdots)$ est un élément quelconque de l^2. Montrer que A est auto-adjoint. Trouver ses valeurs propres et les vecteurs propres correspondants.

EXERCICE 3:

Le produit de convolution de deux fonctions localement intégrables f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et 2π-périodiques est défini par:

$$(f \star g)(x) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-u)g(u)du$$

1. Montrer que $f \star g$ est 2π-périodique, et qu'elle est localement intégrable.
2. Déterminer le $n^{ième}$ coefficient de Fourier du développement en série de Fourier de $f \star g$ en fonction des coefficients du développement en série de Fourier de f et g.

EXERCICE 4:

On considère la fonction de la variable réelle t définie par

$$f(t) := Y(t) \log |t|$$

où Y est la fonction échelon unité de Heaviside. On admettra que f est localement sommable.

1. Soit T la distribution dérivée de la distribution régulière associée à f. Montrer que pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}$, on a:

$$< T, \phi >= \lim_{\epsilon \to 0^+} \left\{ \phi(\epsilon) \log \epsilon + \int_\epsilon^\infty \frac{\phi(t)}{t} dt \right\}.$$

2. Montrer que l'on a, dans $\mathcal{D}'$:

$$T = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left\{ \log \epsilon . \delta(t) + \frac{Y(t-\epsilon)}{t} \right\}.$$